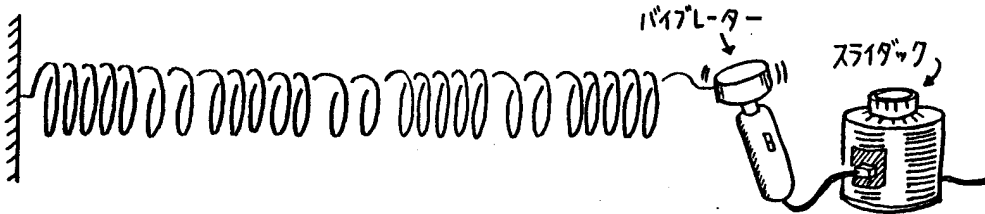


ばねを伝わる波の速さを知りたい

村田憲治 (加納高校)

① ばねにできる縦波の定常波

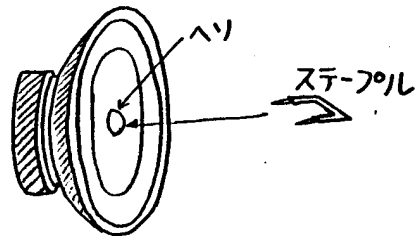
これまでに、ばねをバイブレーター (あんま器) につけて、ばねを伝わる縦波 (これを縦波と言えるのかが実はアヤシイ。後述します。) の定常波をつくる、という実験が開発されていますが、バイブレーターの振動数をスライダックで変化させることはできるのですが、



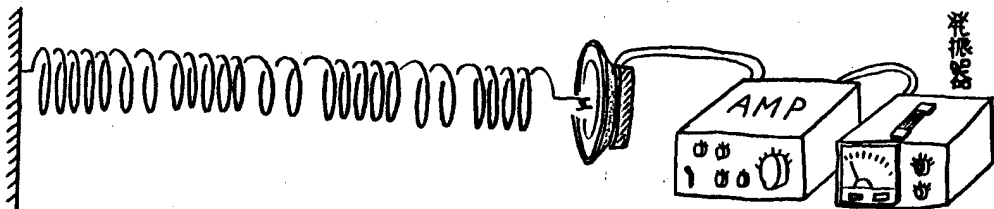
いったい何Hzで振動しているのかよくわからない (まあ、ストロボスコープの光を当てれば分からないことはないけど) ので、 f と λ の関係とかの定量的な扱いができないという困難がありました。そこで、次のような方法で実験してみました。

② スピーカーにばねを取りつけよう

まず、右図のようにスピーカーのヘソにステーブル (ACコードなどを壁に固定するためのコの字型の小さな釘) を刺し、アラルライトなどの接着剤で固定します。



このステーブルにばねの一端を引っかけて、下図のようにすると、縦波の定常波がキレイにできます。(節がハッキリ分かる)



ばねは「ばね電話」用に使っているステンレス製のものです。
低周波発振器の振動数を2倍にすると、節と節の間隔 (半波長 $\lambda/2$) は、ちゃんと $\frac{1}{2}$ になりますから、定量的な取り扱いも十分できます。

ばねを自然長の4倍くらいに伸ばして、発振器の周波数を28Hzにすると、節と節の間隔が15cmでした。これが半波長ですから、ばねを伝わる波の速さは、

(波の伝わる速さ) = (振動数) × (波長) の関係から

$$28\text{Hz} \times 0.30\text{m} = \underline{8.4\text{m/s}} \quad \text{となります。}$$

③ ばねを伝わる波の速さは何で決まるの？

ところで、ばねを伝わる波の速さは、いったいどういう要因で決まるのでしょうか？
手近にある本をあたってみても、はっきりしたことは書いてありません。

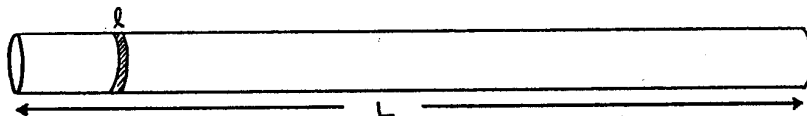
ただ、講談社の「物理実験事典」に

『つる巻きばねを伝わる縦波の速度は、ばねを引き伸ばすと、その長さに比例して大きくなる』

と書いてありました。僕は、弦を伝わる横波の速度 ($v = \sqrt{T/\rho}$) のように、ばねの弾性力の平方根に比例するのではないかと思っていたのですが、どうも違うようです。

次のように考えてみました。(2月のサークル例会の後で考えたことなので、ちょっとアヤシイところがあるかもしれませんが、検討してみてください。)

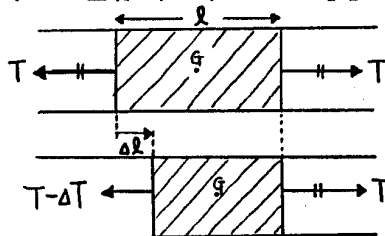
全長 L [m] のばね (自然長 L_0 [m] で、 $L > L_0$ 、ばね定数を k [N/m] とする) を考え、それ自身をマクロな弾性体 (線密度を ρ [kg/m] とする) と考えます。



ばねの一部分に微小部分 l [m] を考えます。

この部分の質量は、 ρl [kg] ……① となります。

いま、 l の左端が、わずかに Δl [m] だけ変位したとします。この部分の張力変化を ΔT [N] とし、



張力変化が t [s] 間に

$$v = \frac{l}{t} \quad \text{……②}$$

の速さで l だけ伝播したとします。

そのとき、 l が受ける合力は、右向きに ΔT [N] です。

左端の変位が Δl 、右端は0ですから、 l の部分の重心の変位は $\Delta l / 2$ となります。

もし、この変動が短い時間で、等加速度で行われたと仮定すると、重心の変位は

$$\frac{\Delta l}{2} = \frac{1}{2} a t^2 \quad \text{……③}$$

と表せます。

運動方程式をつくると、

$$\Delta T = \rho l a \quad \text{……④}$$

$$\text{③, ④から } \Delta T = \rho l \times \frac{\Delta l}{t^2} \quad \text{……⑤}$$

②, ⑤から $\Delta T = \rho l \times \frac{\Delta l}{(l/v)^2}$

$$\rho v^2 = \frac{\Delta T}{\Delta l/l} \dots\dots\dots ⑥$$

ところで、一般に弾性体の体積弾性率 k は

$$\Delta P = k \frac{\Delta V}{V} \quad \text{で定義されますが、「マクロばね」も同様に}$$

$$\Delta T = K \frac{\Delta L}{L} \dots\dots\dots ⑦ \quad \text{で定義される}K\text{を考えて、}$$

K を『ばねの伸び弾性率』とも呼ぶことにします。これは、ばね定数 k とは別モノです。

(この K は、断面積 S の弾性棒でいうと、 ES に相当する(E はヤング率)物理量ですが、ホントにこんなものを勝手に考えていいのかしらん?)

さて、当然 $\frac{\Delta L}{L} = \frac{\Delta l}{l}$ ですから、⑥式の右辺は K に等しいので、

$$\rho v^2 = K$$

$$v = \sqrt{\frac{K}{\rho}} \dots\dots\dots ⑧$$

ところで、 K と k の関係を考えると、

$$\Delta T = k \Delta L \dots\dots ⑨ \quad \text{ですから、}$$

⑦, ⑨より $K = kL$ の関係があることになり、

結局⑧式は、

$$v = \sqrt{\frac{kL}{\rho}} \dots\dots\dots ⑩ \quad \text{となります。}$$

ばねを伝わる波の速さが⑩式で表されるとすれば、講談社の本に書いてあったことも合点がいきます。(Lを2倍にすると ρ が $\frac{1}{2}$ になるので、⑩式より確かに v は2倍になる)

また、実験に使ったばねのL, k , ρ を実測(雑な測定ですが...)してみたところ、それぞれ2.14m, 0.89N/m, 2.2×10^{-2} kgであったので、⑩式に代入してみると、 $v=9.3\text{m/s}$ となり、定常波の波長、振動数から求めた値に近いものができました。

④ ばねをつくるステンレス線を伝わるのは横波?

例会での議論の中では、

「このばねを伝わる波は、もう少しミクロに見れば、ステンレス線のねじれが伝わっているということだろう? ねじれは横波の速度で伝わるはずだが、その速度はいくらくらいなんだ?」

という疑問が出されました。

そう言われれば確かにそうです。ばねを伝わる波は、正確な意味では『縦波』ではない、と言えます。我々は普通これを「ばね」というマクロな弾性体として見るので『縦波』と見えるだけなのだということです。

うーん、いままで気にもしなかったけど鋭い指摘です。

定数表を調べてみると、ステンレスを伝わる横波の速さは、3100m/s となっています。では、先に調べたばねを伝わる10m/s 程度の速度は、実際のステンレス線に沿って計算した場合、3100m/s 程度の値になるのでしょうか？

この例会では、ちょっとした勘違いでステンレス線の長さの見積もりを誤ったので、1000m/s 程度の値になる→オーダーは合う、という結論で納得してしまったのですが、後日、誤りに気がつきました。

ばねにできる定常波の節と節の間のばねの巻き数を数えてステンレス線の長さを計算したところ、ステンレス線に沿って伝わっていると考えられる波の速さは100m/s 程度の値だということがわかりました。定数表の値と合いません。

だいたい、3100m/s もの速さで波が伝わったら、ばね電話のエコー効果は現れないはずです。

この100m/s というのは、高校の教科書に載っている「弦を伝わる横波の速さ」程度の値ですから、「ばねの弦のねじれ」もこれと同程度の速さで伝わるのだ、ということに納得できないこともないのですが、だったら定数表の値は何なのでしょう？

定数表をよく見ると、「波長に比べて十分大きい固体中を伝わる横波の速さ」と書いてあるので、ばねのステンレス線の場合は当てはまらないのかもしれませんが、いまひとつスッキリしません。これは今後の検討課題ですな～。

【参考文献】 物理実験事典 (講談社)

振動と波動 (培風館)

